

PETTERI HARJULEHTO

RIKU KLÉN

MIKA KOSKENOJA

ANALYYSIÄ REAALILUVUILLA



Gaudeamus

Copyright © 2023 Tekijät & Gaudeamus

Kuudes, uudistettu painos

Teoksen ensimmäinen painos ilmestyi vuonna 2014.

Gaudeamus Oy
www.gaudeamus.fi

Kansi: Leena Kilpi

KL 51.3, K • UDK 51

ISBN 978-952-345-249-7

Painopaikka: Printon Trükikoda, Tallinna 2023

Sisällys

| | |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| Mihin analyysiä tarvitaan? | 7 |
| Lukiosta yliopistoon | 9 |
| Mihin tarvitaan tarkkoja määritelmiä? | 11 |
| Kirjan rakenne | 12 |
| Luku 1. Reaaliluvut ja funktion määritelmä | 15 |
| 1.1. Reaalilukujen kunta- ja järjestysaksioomat | 15 |
| 1.2. Infimum, supremum ja täydellisyysaksiooma | 18 |
| 1.3. Matemaattinen todistaminen ja induktio | 23 |
| 1.4. Potenssi ja summamerkintä | 25 |
| 1.5. Funktion määritelmä, injektio, surjektio ja bijektio | 29 |
| 1.6. Trigonometrinen funktioiden geometrinen määritelmä | 34 |
| Osa 1. Raja-arvo | 39 |
| Luku 2. Lukujonon raja-arvo | 41 |
| 2.1. Itseisarvo | 41 |
| 2.2. Lukujonon raja-arvo | 44 |
| 2.3. Monotoninen lukujono ja rajatta kasvaminen | 49 |
| 2.4. Cauchyn yleinen suppenemisehto * | 54 |
| Luku 3. Funktion raja-arvo | 57 |
| 3.1. Raja-arvon määritelmä ja perusominaisuudet | 57 |
| 3.2. Toispuoleiset raja-arvot ja raja-arvo äärettömässä | 63 |
| 3.3. Monotoninen funktio | 67 |
| Osa 2. Jatkuvuus ja derivoituvuus | 71 |
| Luku 4. Funktion jatkuvuus | 73 |
| 4.1. Jatkuvuuden määritelmä | 73 |
| 4.2. Bolzanon lause ja käänteisfunktion jatkuvuus | 80 |
| 4.3. Funktion suurin ja pienin arvo | 87 |
| 4.4. Tasainen jatkuvuus * | 91 |
| Luku 5. Funktion derivaatta | 95 |
| 5.1. Derivaatan määritelmä | 96 |
| 5.2. Funktioiden derivoituvuus ja ketjusääntö | 102 |
| 5.3. Väliarvolause | 109 |
| 5.4. Lipschitz-jatkuvuus * | 116 |
| 5.5. Funktion ääriarvot | 120 |
| 5.6. Konvekksisuus ja korkeamman kertaluvun derivaatat * | 122 |

| | |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 5.7. Newtonin–Raphsonin iteraatio * | 131 |
| Luku 6. Alkeisfunktiot | 135 |
| 6.1. Irrationaaliluku eksponenttina | 135 |
| 6.2. Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmifunktio | 137 |
| 6.3. Yleiset eksponentti- ja potenssifunktiot | 141 |
| 6.4. Arkusfunktiot * | 145 |
| 6.5. l'Hôpitalin säännöt * | 148 |
| Osa 3. Integrointi | 157 |
| Luku 7. Riemannin integraali | 159 |
| 7.1. Ala- ja yläsummat sekä integroituvuus | 160 |
| 7.2. Riemannin integroituvuusehto | 166 |
| 7.3. Porrasfunktiot * | 169 |
| 7.4. Riemannin summat * | 171 |
| 7.5. Riemannin integraalin perusominaisuuksia | 177 |
| Luku 8. Integraalifunktio | 185 |
| 8.1. Integraalifunktion määritelmä | 185 |
| 8.2. Riemannin integraalin ja integraalifunktion yhteys | 189 |
| 8.3. Integraalilaskennan väliarvolause * | 198 |
| 8.4. Polun pituus * | 201 |
| 8.5. Logaritmifunktion määrittely integraalin avulla * | 206 |
| Luku 9. Integroimistekniikoita | 209 |
| 9.1. Integroiminen sijoituksen avulla | 209 |
| 9.2. Osittaisintegrointi | 212 |
| 9.3. Rationaalifunktioiden integrointi | 214 |
| Luku 10. Epäoleellinen integraali | 221 |
| 10.1. Epäoleellisen integraalin määritelmä (tyypit I ja II) | 221 |
| 10.2. Epäoleellisen integraalin ominaisuuksia | 228 |
| 10.3. Ei-negatiivisen funktion epäoleellinen integraali | 236 |
| 10.4. Integraalin itseinen suppeneminen | 242 |
| Osa 4. Funktiojonot ja funktioiden approksimointi | 247 |
| Luku 11. Funktiojonon tasainen suppeneminen | 249 |
| 11.1. Rajafunktion jatkuvuus | 249 |
| 11.2. Rajafunktion integroituvuus ja derivoituvuus | 253 |
| Luku 12. Taylorin ja Maclaurinin polynomit | 261 |
| 12.1. Taylorin kaava | 262 |
| 12.2. Yksikäsitteisyys | 271 |
| 12.3. Sovelluksia | 273 |
| Osa 5. Sarjat | 279 |
| Luku 13. Sarjan suppeneminen | 281 |
| 13.1. Suppenemisen määritelmä ja geometrinen sarja | 281 |
| 13.2. Perustuloksia | 287 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------|-----|
| 13.3. | Majorantti- ja minoranttiperiaate sekä p -sarjat | 292 |
| 13.4. | Muita suppenemistestejä sarjoille * | 296 |
| Luku 14. | Vuorottelevat ja manipuloidut sarjat | 301 |
| 14.1. | Vuorottelevat sarjat ja itseinen suppeneminen | 301 |
| 14.2. | Termien ryhmittely ja ehdollinen suppeneminen * | 306 |
| 14.3. | Termien uudelleenjärjestäminen * | 312 |
| Luku 15. | Potenssisarjat | 317 |
| 15.1. | Potenssisarjan määritelmä ja Abelin lause | 317 |
| 15.2. | Suppenemissäteen määrääminen | 322 |
| 15.3. | Sarjan tasainen suppeneminen | 326 |
| 15.4. | Taylorin sarja | 332 |
| 15.5. | Trigonometrinen funktioiden analyttinen määritelmä * | 337 |
| Liite A. | Joukko-opin merkintöjä | 342 |
| Liite B. | Arkhimedeen lause ja rationaalilukujen tiheys | 344 |
| Liite C. | Reaalilukujen jonokonstruktio | 347 |
| Liite D. | Lukujen π ja e irrationaalisuus | 353 |
| Liite E. | Jatkuva ei-missään derivoituva funktio | 355 |
| Liite F. | Binomisarja | 358 |
| | Kirjallisuutta | 362 |
| | Hakemisto | 364 |
| | Matemaattisia merkintöjä | 368 |
| | Kirjoittajat | 369 |